

Keywords: Euclid's algorithm, the number of digits, Fibonacci sequence, the greatest common divisor, maximum value, limit value

フィボナッチ数に着目して考える、ユークリッドの互除法と桁数の関係

ユークリッドの互除法とは除法を繰り返していくことで、2つの自然数の最大公約数を求める方法である。私は互除法を行う数 $a, b (a > b)$ によってその計算回数 ($\gcd(a, b)$ を求めるまでに除法を行う回数) が異なることに興味を持ち、 a, b がどんな数の時計算回数がより多くなり、大変になるのかを探究することにした。 a, b の大きさによって計算回数は変わるので、私は b の桁数に対する計算回数を x と定義し、(例えば、 b が2桁で計算回数が8回なら $x = 4$ となる) その x の最大値とその時の a, b の条件を求めることにした。探究の過程で、 a, b が隣合うフィボナッチ数であるとき、計算回数が増えることを見つけた。その2つの関係に着目することで、 $x \leq 5$ であること、つまり計算回数は a の値に関わらず b の桁数の5倍以下であること、そして $x = 5$ である a, b はたった3パターンしかないことを示すことが出来た。また、 a, b が隣合うフィボナッチ数であるとき、 x の極限值は黄金比の対数をとった数の逆数というとても簡潔で美しい数となることもわかった。今後は a, b の範囲を自然数から拡張したり、 b の桁数を p 進数で表した時の x の最大値について考えたりしたい。

Discovering the relationship between Euclid's algorithm and the number of digits by focusing on the Fibonacci sequence.

Euclid's algorithm is a method for computing the greatest common divisor of two positive integers a and b with $a > b$ by continuous division. What is the relationship between the steps of division in the Euclid's algorithm a, b ? Since the number of the division steps depends on how large a, b are, define x as a ratio of digits of b to the number of steps. (ex. $x = 4$ if the number of digits of b is 2 and the number of steps is 8) We decided to find the maximum value of x and then a, b . One discovery is that if a and b are consecutive Fibonacci numbers, the number of the division steps will be large. By focusing on this relationship, it was proven that the maximum value of x is 5. In other words, the number of steps in the Euclid's algorithm never exceeds 5 times the number of digits of b , and that there are only 3 pairs $\{a, b\}$ if $x = 5$. Also it was found that if a and b are consecutive Fibonacci numbers, then the limit value of x is the reciprocal of the log base 10 of the Golden Ratio, which is a much simpler number. One future prospect is to expand the range of a, b from natural numbers to real numbers, or to find the maximum value of x if the numbers are converted to base m .